УДК 534-18

РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ОДИНОЧНЫХ ШАРОВИДНЫХ ВКЛЮЧЕНИЯХ РАЗЛИЧНОГО ТИПА В ПОРИСТОЙ ФЛЮИДОНАСЫЩЕННОЙ СРЕДЕ

О.В. Нагорнов, Д.В. Пономарев

Аннотация

В данной работе рассматривается задача о рассеянии плоской волны, распространяющейся в пористой флюидонасыщенной среде, на шаровидной неоднородности для случаев сплошного твердого, жидкого и пористого включений. Изучается отраженное волновое поле, записываемое в виде разложения по сферическим гармоникам. В длинноволновом пределе получены эффективные решения и проанализировано частотное поведение амплитуд составляющих их гармоник. Полученные результаты применимы как для единичных крупномасштабных включений на низких частотах, так и для последующего построения модели среды с многочисленными мелкими неоднородностями в более широком диапазоне частот.

Ключевые слова: Пористая среда, модель Био, многомасштабные неоднородности, двойная пористость, рассеяние плоских волн.

1. Введение

Известно, что при землетрясениях поверхностные рэлеевские волны переносят значительную долю энергии ([3], [6]), тем не менее немаловажным является описание объемных волн в реальных флюидонасыщенных геосредах. При исследовании распространения сейсмических волн в таких средах эффективными являются модели с двойной пористостью, строящиеся в основном на идеализации среды с неоднородностями разного масштаба ([8], [17]). Для построения моделей таких сред оказывается полезно рассмотреть взаимодействие распространяющейся в пористой среде волны с одиночной неоднородностью простейшей формы. В связи с этим представляет интерес задача о рассеянии плоской волны на шаровидном включении. В случае пористого включения такая задача изучалась рядом авторов ([7], [12]). При контакте пористой насыщенной среды с твердым и жидким включением имеется принципиальная разница в краевых условиях в силу того факта, что жидкая фаза может свободно проникать через границу сред, в то время как на границе со сплошной твердой средой скорость жидкости на контакте равна нулю. Целью данной работы является решение задачи рассеяния на твердой, жидкой и пористой неоднородностях, вкрапленных в насыщенную пористую среду, описываемую в линейно-упругом изотропном приближении.

2. Модель пористой среды

Рассматриваемая пористая среда является двухфазной, состоящей из упругого твердого скелета и полностью заполняющей поровое пространство жидкости. Данная среда может быть описана путем усреднения. Тензор полных напряжений в произвольной точке определяется следующим образом [4, 15]:

$$\Gamma_{ij} = (1-\beta)\sigma_{ij}^{0} - \beta p \delta_{ij} = \sigma_{ij} + s\delta_{ij} \tag{2.1}$$

где $s=-\beta p$ - сила, действующая на единицу площади со стороны жидкости, σ_{ij} - тензор напряжений в упругой матрице (иначе говоря, силы, действующие на единицу площади со стороны твердой фазы), p - давление жидкой фазы, σ_{ij}^{0} - тензор напряжений в твердой фазе в случае отсутствия пор, β - пористость (т.е. доля объема, занимаемого жидкостью), δ_{ij} - символ Кронекера.

Связь между тензорами деформаций и смещений в пористой среде при отсутствии внешних сил, таких как сила тяжести, определяем, вводя независимые скалярные величины: 3 инварианта тензора деформаций и относительное изменение объема жидкости. Энергия деформации должна являться положительно определенной квадратичной формой компонент тензора деформаций, а, следовательно, один из инвариантов – кубический – должен быть исключен из рассмотрения. Таким образом

$W=W(I_1,I_2,\varepsilon)$, где $I_1=e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}\equiv e,\ \ I_2=e_{xx}e_{yy}+e_{xx}e_{zz}+e_{yy}e_{zz}-e_{xy}^2-e_{xz}^2-e_{yz}^2$,

$e=div\,\vec{u},\ \ \varepsilon=div\,\vec{U}$ - относительные изменения объемов фаз;

$\vec{u},\ \vec{U}$ - величины смещений в твердой и жидкой фазе соответственно.

Запишем свободную энергию единицы объема деформированной среды в виде

$$\begin{aligned}W&=\frac{1}{2}\left(A+2Q+2N+R\right)e^2-\frac{(R+Q)}{\beta}e\xi+\frac{R}{2\beta^2}\xi^2-2NI_2=\\&=\frac{1}{2}\left(A+2Q+R+\frac{2}{3}N\right)e^2-\frac{(R+Q)}{\beta}e\xi+\frac{R}{2\beta^2}\xi^2+\frac{1}{3}N\left[(e_{xx}-e_{yy})^2+(e_{xx}-e_{zz})^2+(e_{yy}-e_{zz})^2\right]+2N(e_{xy}^2+e_{xz}^2+e_{yz}^2)\end{aligned}\qquad(2.2)$$

где $\xi=\beta(e-\varepsilon)$.

Можно показать, что при изотермической деформации в случае отсутствия внешних объемных сил справедливы соотношения [9]:

$$\Gamma_{xx}=\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}\right),\ \Gamma_{yy}=\left(\frac{\partial W}{\partial e_{yy}}\right),\ \Gamma_{zz}=\left(\frac{\partial W}{\partial e_{zz}}\right),$$
$$\Gamma_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}\right),\ \Gamma_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{xz}}\right),\ \Gamma_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial e_{yz}}\right),$$
$$s=\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)$$

Продифференцировав (2.2), получим связь полных напряжений и деформаций

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}&=2Ne_{ij}+\left[\left(A+Q\right)e+\left(Q+R\right)\varepsilon\right]\delta_{ij}\\ s&=Qe+R\varepsilon\end{aligned}\tag{2.3}$$

Для напряжений в упругой матрице будем иметь

$$\sigma_{ij}=2Ne_{ij}+(Ae+Q\varepsilon)\delta_{ij}\tag{2.4}$$

Заметим, что полученное выражение является обобщением известного закона Гука для однородной изотропной упругой среды.

Запишем кинетическую энергию единицы объема как положительно определенную квадратичную форму скоростей

$$T=\frac{\rho_{11}}{2}\left[\dot{u}_x^{\,2}+\dot{u}_y^{\,2}+\dot{u}_z^{\,2}\right]+\rho_{12}\left[\dot{u}_x\dot{U}_x+\dot{u}_y\dot{U}_y+\dot{u}_z\dot{U}_z\right]+\frac{\rho_{22}}{2}\left[\dot{U}_x^{\,2}+\dot{U}_y^{\,2}+\dot{U}_z^{\,2}\right]$$

Коэффициенты $\rho_{11},\rho_{12},\rho_{22}$ точно так же, как и используемые выше константы A, N, Q, R, могут быть выражены через параметры пористой среды и составляющих ее фаз (подробнее этот вопрос рассмотрен в п. Приложение).

Чтобы учесть потери энергии в среде за счет трения флюида о скелет, введем диссипативную функцию [9]

$$D=\frac{b}{2}\left[\left(\dot{u}_x-\dot{U}_x\right)^2+\left(\dot{u}_y-\dot{U}_y\right)^2+\left(\dot{u}_z-\dot{U}_z\right)^2\right] \tag{2.5}$$

где $b=\beta^2\dfrac{\eta}{\kappa}$ - постоянная, выражаемая так для согласования с законом Дарси, η - вязкость жидкости, κ - проницаемость среды.

Вообще говоря, введение диссипативной функции в виде (2.5) является адекватным лишь при частотах значительно ниже некоторого критического значения

$$\omega_c=\beta\eta/\left(\kappa\rho_f\right),$$

которое тем не менее достаточно высоко.

Уравнения Лагранжа с учетом диссипации имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i}\right)=\frac{\partial L}{\partial u_i}-\frac{\partial D}{\partial \dot{u}_i}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{U}_i}\right)=\frac{\partial L}{\partial U_i}-\frac{\partial D}{\partial \dot{U}_i}$$

где $L=T-W$ - функция Лагранжа.

Подстановка сюда всех выписанных выше выражений с использованием соотношений

$$\frac{\partial W}{\partial u_i}=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k},\quad \frac{\partial W}{\partial U_i}=\frac{\partial s}{\partial x_i}$$

приводит к следующим уравнениям [10]

$$\begin{cases} N\Delta\vec{u}+grad[(A+N)e+Q\varepsilon]=(\rho_{11}\ddot{\vec{u}}+\rho_{12}\ddot{\vec{U}})+b(\dot{\vec{u}}-\dot{\vec{U}}) \\ grad[Qe+R\varepsilon]=(\rho_{12}\ddot{\vec{u}}+\rho_{22}\ddot{\vec{U}})-b(\dot{\vec{u}}-\dot{\vec{U}}) \end{cases} \tag{2.6}$$

Вводя скалярные и векторные потенциалы, рассмотрим распространение в среде монохроматического сигнала частоты ω. Представим смещения в виде

$$\begin{aligned} \vec{u}&=e^{i\omega t}(grad\ \varphi+rot\ \vec{\psi}) \\ \vec{U}&=e^{i\omega t}(grad\ \phi+rot\ \vec{\chi}) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Тогда уравнения (2.6) примут вид

$$\begin{cases}(A+2N)grad\Delta\varphi+Q\ grad\Delta\phi-N\ rot\ rot\ rot\,\vec{\psi}=\omega(ib-\omega\rho_{11})(grad\ \varphi+rot\,\vec{\psi})-\omega(ib+\omega\rho_{12})(grad\ \phi+rot\ \vec{\chi})\\ Q\ grad\Delta\varphi+R\ grad\Delta\phi=-\omega(ib+\omega\rho_{12})(grad\ \varphi+rot\,\vec{\psi})+\omega(ib-\omega\rho_{22})(grad\ \phi+rot\ \vec{\chi})\end{cases}$$

После применения операций rot и div и алгебраических преобразований эта система может быть сведена к следующим уравнениям

$$\begin{cases}\vec{\chi}=\Omega\,\vec{\psi}\\ rot\ rot\,\vec{\psi}-k_s^2\vec{\psi}=\vec{0}\end{cases}$$

и

$$\begin{cases}\Delta\varphi=a\varphi+B\phi\\ \Delta\phi=c\varphi+D\phi\end{cases}$$

с учетом обозначений:

$$\Omega=-\frac{\omega\rho_{12}+ib}{\omega\rho_{22}-ib}$$

$$k_s^2=-\frac{\omega^2}{N}\left[\frac{\omega\rho_{12}^2+2ib\rho_{12}+ib\rho_{22}}{\omega\rho_{22}-ib}-\rho_{11}\right]$$

$$a=\frac{\omega[\omega(R\rho_{11}-Q\rho_{12})-ib(R+Q)]}{Q^2-(A+2N)R}$$

$$B=\frac{\omega[\omega(R\rho_{12}-Q\rho_{22})+ib(R+Q)]}{Q^2-(A+2N)R}$$

$$c=-\frac{\omega[\omega(Q\rho_{11}-(A+2N)\rho_{12})-ib(A+2N+Q)]}{Q^2-(A+2N)R}$$

$$D=-\frac{\omega[\omega(Q\rho_{12}-(A+2N)\rho_{22})+ib(A+2N+Q)]}{Q^2-(A+2N)R}$$

Уравнения на продольные потенциалы оказались связанными, поэтому для их решения введем вспомогательные потенциалы

$$F_1=\varphi+\gamma_1\phi,\quad F_2=\varphi+\gamma_2\phi \qquad (2.8)$$

где

$$\gamma_1=\frac{D-a+\sqrt{(D-a)^2+4Bc}}{2c},\quad \gamma_2=\frac{D-a-\sqrt{(D-a)^2+4Bc}}{2c} \qquad (2.9)$$

В таком случае получаем независимые уравнения

$$\Delta F_{1,2} + k_{1,2}^2 F_{1,2} = 0 \tag{2.10}$$

вводя обозначение

$$k_{1,2}^2 = -a - \gamma_{1,2} c \tag{2.11}$$

Анализ показывает, что при не слишком больших частотах справедливо $|k_1| \propto \omega$, $|k_2| \propto \sqrt{\omega}$, причем $|\operatorname{Im} k_1| << |\operatorname{Re} k_1|$, $|\operatorname{Im} k_2| \approx |\operatorname{Re} k_2|$ (а именно, при выбранной временной зависимости $e^{i\omega t}$ имеет место $\operatorname{Im} k_2 \approx -\operatorname{Re} k_2$ - соотношение, которое нам в дальнейшем понадобится).

Это свидетельствует о наличии в пористых флюидонасыщенных средах двух типов продольных волн: волны 1-го рода (“быстрая волна”), и волны 2-го рода (“медленная волна”), которая интенсивно диссипируется.

3. Рассеяние на твердом шаровидном включении

Рассмотрим следующую постановку задачи. В пористой флюидонасыщенной среде имеется твердотельная неоднородность в форме шара радиуса R_a, на который падает плоская волна (1-го рода), имеющая частоту ω и амплитуду A_{01} (Фиг. 1). Необходимо рассчитать волновые поля в пористой среде.

Введем сферические координаты, выбрав начало координат в центре неоднородности, а ось z вдоль направления падения волны. Очевидно, такая задача будет иметь аксиальную симметрию.

Запишем сформулированные выше уравнения пористой среды ($r > \mathrm{R}_a$):

$$\begin{cases} \Delta F_1 + k_1^2 F_1 = 0 \\ \Delta F_2 + k_2^2 F_2 = 0 \\ \Delta \psi - \dfrac{\psi}{r^2 \sin^2 \theta} + k_s^2 \psi = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

где ψ - азимутальная компонента вектора $\vec{\psi} = \{0, 0, \psi\}$.

Уравнения упругой среды ($r < \mathrm{R}_a$):

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\varphi} + \tilde{k}^2 \tilde{\varphi} = 0 \\ \Delta \tilde{\psi} - \dfrac{\tilde{\psi}}{r^2 \sin^2 \theta} + \tilde{k}_s^2 \tilde{\psi} = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

где $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ - скалярные и векторные потенциалы, введенные стандартным образом – так, что смещения в твердом включении представляются в виде $\tilde{\vec{u}} = e^{i\omega t}(grad\ \tilde{\varphi} + rot\ \tilde{\vec{\psi}})$; $\tilde{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{\tilde{c}_l^2}$, $\tilde{k}_s^2 = \dfrac{\omega^2}{\tilde{c}_s^2}$; $\tilde{c}_l, \tilde{c}_s$ - скорости звука продольных и поперечных волн для твердой среды.

Уравнения на продольные потенциалы в (3.1) имеют вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial F}{\partial \theta}\right) + k^2 F = 0$$

Разделяя переменные $F(r,\theta) = R(r)Y(\theta)$, общее решение дается разложением по сферическим гармоникам [5]

$$F(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)\left(-\frac{r}{k}\right)^l \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l \left[C_1^{(l)} \frac{e^{ikr}}{kr} + C_2^{(l)} \frac{e^{-ikr}}{kr}\right]$$

Уравнения на поперечные потенциалы в (3.1), записывающиеся как

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}\right) - \frac{\Psi}{r^2 \sin^2\theta} + k_s^2 \Psi = 0,$$

имеют сходные по виду решения

$$\Psi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}P_l'(\cos\theta)\sin\theta\left(-\frac{r}{k_s}\right)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\left[C_3^{(l)}\frac{e^{ik_sr}}{k_sr}+C_4^{(l)}\frac{e^{-ik_sr}}{k_sr}\right]$$

В области $r<\mathrm{R}_a$ из условия существования решения при $r=0$, константы следует выбрать так, чтобы потенциалы приняли вид

$$F(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)\left(-\frac{r}{k}\right)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\left[C_5^{(l)}\frac{\sin kr}{kr}\right]$$

$$\Psi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}P_l'(\cos\theta)\sin\theta\left(-\frac{r}{k_s}\right)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\left[C_6^{(l)}\frac{\sin k_sr}{k_sr}\right]$$

В области $r>\mathrm{R}_a$ поле $F_1(r,\theta)$ представим в виде суммы падающей и отраженной волн

$$F_1(r,\theta)=A_{01}e^{-ik_1r\cos\theta}+\sum_{l=0}^{n}P_l(\cos\theta)\left(-\frac{r}{k_1}\right)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\left[\tilde{A}_{11}^{(l)}\frac{e^{ik_1r}}{k_1r}+A_{11}^{(l)}\frac{e^{-ik_1r}}{k_1r}\right]$$

Как и всякое частное решение уравнения на F_1, плоская волна $e^{-ik_1r\cos\theta}$ может быть также разложена по сферическим функциям [1]

$$e^{-ik_1r\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta)\left(\frac{ir}{k_1}\right)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\left[\frac{\sin k_1r}{k_1r}\right]$$

Исходя из всего вышесказанного, выпишем решения каждого из исходных уравнений в (3.1) и (3.2)

$$F_1(r,\theta)=A_{01}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta)\left(\frac{ir}{k_1}\right)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\frac{\sin k_1r}{k_1r}+\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)\left(-\frac{r}{k_1}\right)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\left[\tilde{A}_{11}^{(l)}\frac{e^{ik_1r}}{k_1r}+A_{11}^{(l)}\frac{e^{-ik_1r}}{k_1r}\right]$$

$$F_2(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)\left(-\frac{r}{k_2}\right)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\left[\tilde{A}_{12}^{(l)}\frac{e^{ik_2r}}{k_2r}+A_{12}^{(l)}\frac{e^{-ik_2r}}{k_2r}\right]$$

$$\psi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}P_l'(\cos\theta)\sin\theta\left(-\frac{r}{k_s}\right)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\left[\tilde{A}_t^{(l)}\frac{e^{ik_sr}}{k_sr}+A_t^{(l)}\frac{e^{-ik_sr}}{k_sr}\right]$$

$$\tilde{\varphi}(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)\left(-\frac{r}{\tilde{k}}\right)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\left[B_{11}^{(l)}\frac{\sin\tilde{k}r}{\tilde{k}r}\right]$$

$$\tilde{\psi}(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}P_l'(\cos\theta)\sin\theta\left(-\frac{r}{\tilde{k}_s}\right)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\left[B_t^{(l)}\frac{\sin\tilde{k}_sr}{\tilde{k}_sr}\right]$$

Учитывая, что $\operatorname{Im} k_1 < 0,\ \operatorname{Im} k_2 < 0$, из условия затухания на бесконечности получаем $\tilde{A}_{11}^{(l)} = \tilde{A}_{12}^{(l)} = 0$.

Более того, $\tilde{A}_t^{(l)} = 0$, т.к. должно выполняться условие излучения Зоммерфельда $\dfrac{\partial \psi}{\partial r} + i k_s \psi = o\left(\dfrac{1}{r}\right)$, где под $o\left(\dfrac{1}{r}\right)$ понимаем величину более высокого порядка малости, чем $\dfrac{1}{r}$ при $r \to \infty$. Тогда

$$F_1(r,\theta) = A_{01}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta)\left(\frac{ir}{k_1}\right)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\frac{\sin k_1 r}{k_1 r} + \sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)\left(-\frac{r}{k_1}\right)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\left[A_{11}^{(l)}\frac{e^{-ik_1 r}}{k_1 r}\right] =$$

$$= A_{01}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left(-i\right)^l P_l(\cos\theta)\sqrt{\frac{\pi}{2k_1 r}}J_{l+1/2}(k_1 r) + \sum_{l=0}^{\infty}A_{11}^{(l)}(-i)P_l(\cos\theta)\sqrt{\frac{\pi}{2k_1 r}}H_{l+1/2}^{(2)}(k_1 r)$$

$$F_2(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)\left(-\frac{r}{k_2}\right)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\left[A_{12}^{(l)}\frac{e^{-ik_2 r}}{k_2 r}\right] = \sum_{l=0}^{\infty}A_{12}^{(l)}(-i)P_l(\cos\theta)\sqrt{\frac{\pi}{2k_2 r}}H_{l+1/2}^{(2)}(k_2 r)$$

$$\psi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}P_l'(\cos\theta)\sin\theta\left(-\frac{r}{k_s}\right)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\left[A_t^{(l)}\frac{e^{-ik_s r}}{k_s r}\right] = \sum_{l=0}^{\infty}A_t^{(l)}\left(-i\right)P_l'(\cos\theta)\sin\theta\sqrt{\frac{\pi}{2k_s r}}H_{l+1/2}^{(2)}(k_s r)$$

$$\tilde{\varphi}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)\left(-\frac{r}{\tilde{k}}\right)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\left[B_{11}^{(l)}\frac{\sin\tilde{k}r}{\tilde{k}r}\right] = \sum_{l=0}^{\infty}B_{11}^{(l)}P_l(\cos\theta)\sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{k}r}}J_{l+1/2}(\tilde{k}r)$$

$$\tilde{\psi}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}P_l'(\cos\theta)\sin\theta\left(-\frac{r}{\tilde{k}_s}\right)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\left[B_t^{(l)}\frac{\sin\tilde{k}_s r}{\tilde{k}_s r}\right] = \sum_{l=0}^{\infty}B_t^{(l)}P_l'(\cos\theta)\sin\theta\sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{k}_s r}}J_{l+1/2}(\tilde{k}_s r)$$

где $J_{l+1/2}(x),\ H_{l+1/2}^{(2)}(x)$ - цилиндрические функции Бесселя и Ханкеля 2-го рода полуцелого порядка $(l+1/2)$.

Амплитуды гармоник $A_{11}^{(l)}, A_{12}^{(l)}, A_t^{(l)}, B_{11}^{(l)}, B_t^{(l)}$ находятся из граничных условий ($r = \mathrm{R}_a$)

$$\begin{cases} \Gamma_{rr} = \tilde{\sigma}_{rr} \\ \Gamma_{r\theta} = \tilde{\sigma}_{r\theta} \\ u_r = \tilde{u}_r \\ u_\theta = \tilde{u}_\theta \\ u_r = U_r \end{cases} \qquad (3.3)$$

где $\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{\rho}(\tilde{c}_l^2 - 2\tilde{c}_s^2)\tilde{e}\delta_{ij} + 2\tilde{\rho}\tilde{c}_s^2\tilde{e}_{ij}$; $\tilde{e} = div\,\tilde{\vec{u}}$; $\tilde{\sigma}_{ij}, \tilde{e}_{ij}$ - тензоры напряжений и деформаций в твердом включении, $\tilde{\rho}$ - плотность твердой среды.

Компоненты тензоров деформаций (как для упругой фазы пористой среды, так и для шаровидного включения) с учетом симметрии имеют вид $e_{rr} = \dfrac{\partial u_r}{\partial r}$, $e_{r\theta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} - \dfrac{u_\theta}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)$.

Пользуясь выписанными выше связями напряжений и смещений, выразив смещения через введенные потенциалы, после алгебраических преобразований и упрощений в силу справедливости уравнений получаем следующую запись граничных условий (3.3) (в соответствующем порядке)

$$1)\quad \big((A+Q)\gamma_2-Q-R\big)k_1^2F_1-\big((A+Q)\gamma_1-Q-R\big)k_2^2F_2+2N\left(\gamma_1\frac{\partial^2F_2}{\partial r^2}-\gamma_2\frac{\partial^2F_1}{\partial r^2}\right)+$$

$$+\frac{2N(\gamma_1-\gamma_2)}{r}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+ctg\theta\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{ctg\theta}{r}\psi\right)=-\rho(c_l^2-2c_s^2)(\gamma_1-\gamma_2)\tilde{k}^2\tilde{\varphi}+$$

$$+2\rho c_s^2(\gamma_1-\gamma_2)\left(\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\theta}+\frac{ctg\theta}{r}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial r}-\frac{ctg\theta}{r^2}\tilde{\psi}\right)$$

$$2)\quad \frac{2N}{(\gamma_1-\gamma_2)r}\left(\gamma_1\frac{\partial^2F_2}{\partial r\partial\theta}-\gamma_2\frac{\partial^2F_1}{\partial r\partial\theta}-\frac{\gamma_1}{r}\frac{\partial F_2}{\partial\theta}+\frac{\gamma_2}{r}\frac{\partial F_1}{\partial\theta}\right)-N\left(2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+(k_s^2-\frac{2}{r^2})\psi\right)=$$

$$=\frac{2\rho c_s^2}{r}\left(\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\theta}\right)-\rho c_s^2\left(2\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial r}+(k_s^2-\frac{2}{r^2})\tilde{\psi}\right)$$

$$3)\quad \frac{1}{(\gamma_1-\gamma_2)}\left(\gamma_1\frac{\partial F_2}{\partial r}-\gamma_2\frac{\partial F_1}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{ctg\theta}{r}\psi=\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\theta}+\frac{ctg\theta}{r}\tilde{\psi}$$

$$4)\quad \frac{1}{(\gamma_1-\gamma_2)r}\left(\gamma_1\frac{\partial F_2}{\partial\theta}-\gamma_2\frac{\partial F_1}{\partial\theta}\right)-\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{\psi}{r}=\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\theta}-\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial r}-\frac{\tilde{\psi}}{r}$$

$$5)\quad \left((1+\gamma_1)\frac{\partial F_2}{\partial r}-(1+\gamma_2)\frac{\partial F_1}{\partial r}\right)+(\gamma_1-\gamma_2)(1-\Omega)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{ctg\theta}{r}\psi\right)=0$$

Подставляя сюда выписанные выше решения уравнений, принимая во внимание свойство линейной независимости полиномов Лежандра, сводим задачу определения амплитуд гармоник к решению системы алгебраических уравнений.

После численного решения этой системы для первых нескольких гармоник в приближении $|k_1R_a|<<1$ (что является справедливым в силу малости размера включения и рассматриваемого диапазона невысоких частот) был сделан вывод о стремительном убывании амплитуд гармоник волновых полей в пористой среде, начиная с $l=3$.

С учетом сказанного, принимая во внимание поведение функций Ханкеля при больших значениях аргумента (ее асимптотику см. ниже), можно утверждать, что эффективные волновые поля в пористой среде вдали от неоднородности определяются следующим образом

$$
\begin{aligned}
F_1(r,\theta) &\approx A_{01} e^{-ik_1 r\cos\theta} + \sum_{l=0}^{2} A_{11}^{(l)}(-i) P_l(\cos\theta)\sqrt{\frac{\pi}{2k_1 r}} H_{l+1/2}^{(2)}(k_1 r) \\
F_2(r,\theta) &\approx A_{12}^{(2)}(-i) P_2(\cos\theta)\sqrt{\frac{\pi}{2k_2 r}} H_{5/2}^{(2)}(k_2 r) \\
\psi(r,\theta) &\approx \sum_{l=1}^{2} A_t^{(l)} \left(-i\right) P_l'(\cos\theta)\sin\theta\sqrt{\frac{\pi}{2k_s r}} H_{l+1/2}^{(2)}(k_s r)
\end{aligned}
$$

Анализ действительной и мнимой частей амплитуд гармоник показывает, что

$$
|\operatorname{Im} A_{11}^{(0)}| << |\operatorname{Re} A_{11}^{(0)}|,\ \ |\operatorname{Re} A_{11}^{(1)}| << |\operatorname{Im} A_{11}^{(1)}|,\ \ |\operatorname{Im} A_{11}^{(2)}| << |\operatorname{Re} A_{11}^{(2)}|,
$$

$$
\operatorname{Im} A_{12}^{(2)} \approx -\operatorname{Re} A_{12}^{(2)},\ \ |\operatorname{Re} A_t^{(1)}| << |\operatorname{Im} A_t^{(1)}|,\ \ |\operatorname{Im} A_t^{(2)}| << |\operatorname{Re} A_t^{(2)}|
$$

Причем приближенное равенство здесь выполняется лишь при рассматриваемых невысоких частотах.

С учетом этого, а также принимая во внимание асимптотику $H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} e^{-i(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4})} + o(\dfrac{1}{x^{1/2}})$

при $x >> 1$, получаем следующие эффективные волновые поля на больших расстояниях

$$
\begin{aligned}
F_1(r,\theta) &\approx A_{01} e^{-ik_1 r\cos\theta} + \left[\operatorname{Re} A_{11}^{(0)} + i\operatorname{Im} A_{11}^{(1)} P_1(\cos\theta) - \operatorname{Re} A_{11}^{(2)} P_2(\cos\theta)\right]\frac{e^{-ik_1 r}}{k_1 r} \\
F_2(r,\theta) &\approx -(1-i)\operatorname{Re} A_{12}^{(2)} P_2(\cos\theta)\frac{e^{-ik_2 r}}{k_2 r} \approx -\operatorname{Re} A_{12}^{(2)} P_2(\cos\theta)\frac{e^{-ik_2 r}}{\operatorname{Re} k_2 r} \qquad (3.4) \\
\psi(r,\theta) &\approx \left[i\operatorname{Im} A_t^{(1)} P_1'(\cos\theta) - \operatorname{Re} A_t^{(2)} P_2'(\cos\theta)\right]\sin\theta\frac{e^{-ik_s r}}{k_s r}
\end{aligned}
$$

Здесь для еще большого упрощения вида волнового поля $F_2(r,\theta)$ мы воспользовались соотношением $\operatorname{Im} k_2 \approx -\operatorname{Re} k_2$.

С целью определения частотной зависимости амплитуд гармоник эффективных полей могут быть построены соответствующие графики в логарифмическом масштабе. Линейный вид этих графиков позволяет вычислить угловые коэффициенты, и, следовательно, определить степенные зависимости амплитуд от частоты. В итоге, при рассматриваемых низких частотах имеем

$$|A_{11}^{(0)}| \approx |\operatorname{Re} A_{11}^{(0)}| \propto \omega^3, \quad |A_{11}^{(1)}| \approx |\operatorname{Im} A_{11}^{(1)}| \propto \omega^3, \quad |A_{11}^{(2)}| \approx |\operatorname{Re} A_{11}^{(2)}| \propto \omega^3,$$
$$|A_{12}^{(2)}| \propto |\operatorname{Re} A_{12}^{(2)}| \propto \omega^{5/2}, \quad |A_t^{(1)}| \approx |\operatorname{Im} A_t^{(1)}| \propto \omega^3, \quad |A_t^{(2)}| \approx |\operatorname{Re} A_t^{(2)}| \propto \omega^3$$

4. Рассеяние на жидком шаровидном включении

Формулировка задачи остается прежней, только теперь под шаровидной неоднородностью будем понимать полость, заполненную идеальной жидкостью.

Уравнения пористой среды ($r > \mathrm{R}_a$):

$$\begin{cases} \Delta F_1 + k_1^2 F_1 = 0 \\ \Delta F_2 + k_2^2 F_2 = 0 \\ \Delta \psi - \dfrac{\psi}{r^2 \sin^2 \theta} + k_s^2 \psi = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Уравнение жидкой среды ($r < \mathrm{R}_a$):

$$\Delta \tilde{\tilde{\varphi}} + \tilde{\tilde{k}}^2 \tilde{\tilde{\varphi}} = 0 \tag{4.2}$$

где $\tilde{\tilde{\varphi}}$ - скалярный потенциал, введенный стандартным образом – так, что смещения в жидком включении представляются в виде $\vec{\tilde{\tilde{U}}} = e^{i\omega t} grad\, \tilde{\tilde{\varphi}}$; $\tilde{\tilde{k}}^2 = \frac{\omega^2}{\tilde{\tilde{c}}^2}$; $\tilde{\tilde{c}}^2$ - скорость звука в жидкой среде.

Ввиду полной аналогии вида уравнений с предыдущим случаем, выпишем сразу их решения

$$F_1(r,\theta) = A_{01}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta)\left(\frac{ir}{k_1}\right)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\frac{\sin k_1 r}{k_1 r} + \sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)\left(-\frac{r}{k_1}\right)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\left[A_{11}^{(l)}\frac{e^{-ik_1 r}}{k_1 r}\right] =$$

$$= A_{01}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(-i)^l P_l(\cos\theta)\sqrt{\frac{\pi}{2k_1 r}}J_{l+1/2}(k_1 r) + \sum_{l=0}^{\infty}A_{11}^{(l)}(-i)P_l(\cos\theta)\sqrt{\frac{\pi}{2k_1 r}}H_{l+1/2}^{(2)}(k_1 r)$$

$$F_2(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)\left(-\frac{r}{k_2}\right)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\left[A_{12}^{(l)}\frac{e^{-ik_2 r}}{k_2 r}\right] = \sum_{l=0}^{\infty}A_{12}^{(l)}(-i)P_l(\cos\theta)\sqrt{\frac{\pi}{2k_2 r}}H_{l+1/2}^{(2)}(k_2 r)$$

$$\psi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}P_l'(\cos\theta)\sin\theta\left(-\frac{r}{k_s}\right)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\left[A_t^{(l)}\frac{e^{-ik_s r}}{k_s r}\right] = \sum_{l=0}^{\infty}A_t^{(l)}(-i)P_l'(\cos\theta)\sin\theta\sqrt{\frac{\pi}{2k_s r}}H_{l+1/2}^{(2)}(k_s r)$$

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)\left(-\frac{r}{\tilde{\tilde{k}}}\right)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\left[B_{11}^{(l)}\frac{\sin\tilde{\tilde{k}}r}{\tilde{\tilde{k}}r}\right] = \sum_{l=0}^{\infty}B_{11}^{(l)}P_l(\cos\theta)\sqrt{\frac{\pi}{2\tilde{\tilde{k}}r}}J_{l+1/2}(\tilde{\tilde{k}}r)$$

Граничные условия ($r = \mathrm{R}_a$) в данном случае формулируются следующим образом

$$\begin{cases}\Gamma_{rr} = -\tilde{\tilde{p}}\\ \Gamma_{r\theta} = 0\\ p = \tilde{\tilde{p}}\\ (1-\beta)u_r + \beta U_r = \tilde{\tilde{U}}_r\end{cases} \tag{4.3}$$

где $\tilde{\tilde{p}}$ - давление в жидком включении.

Учитывая связь давлений (в обеих средах) с соответствующими скалярными потенциалами $p = \rho_f\omega^2\phi$, $\tilde{\tilde{p}} = \rho_f\omega^2\tilde{\tilde{\varphi}}$, где $\phi = \frac{F_1 - F_2}{\gamma_1 - \gamma_2}$ (согласно введению F_1 и F_2), ρ_f - плотность жидкости, можем записать все граничные условия (4.3) в терминах потенциалов

1) $$\left((A+Q)\gamma_2-Q-R\right)k_1^2F_1-\left((A+Q)\gamma_1-Q-R\right)k_2^2F_2+2N\left(\gamma_1\frac{\partial^2F_2}{\partial r^2}-\gamma_2\frac{\partial^2F_1}{\partial r^2}\right)+$$
$$+\frac{2N(\gamma_1-\gamma_2)}{r}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+ctg\theta\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{ctg\theta}{r}\psi\right)=-\rho_f\omega^2\tilde{\tilde{\varphi}}$$

2) $$\frac{2N}{(\gamma_1-\gamma_2)r}\left(\gamma_1\frac{\partial^2F_2}{\partial r\partial\theta}-\gamma_2\frac{\partial^2F_1}{\partial r\partial\theta}-\frac{\gamma_1}{r}\frac{\partial F_2}{\partial\theta}+\frac{\gamma_2}{r}\frac{\partial F_1}{\partial\theta}\right)-N\left(2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+(k_s^2-\frac{2}{r^2})\psi\right)=0$$

3) $$(\mathrm{Q}\gamma_2-R)k_1^2F_1-(\mathrm{Q}\gamma_1-R)k_2^2F_2=-(\gamma_1-\gamma_2)\beta\rho_f\omega^2\tilde{\tilde{\varphi}}$$

4) $$(1\text{-}\beta)\left[\frac{1}{(\gamma_1-\gamma_2)}\left(\gamma_1\frac{\partial F_2}{\partial r}-\gamma_2\frac{\partial F_1}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{ctg\theta}{r}\psi\right]+$$
$$+\beta\left[\frac{1}{(\gamma_1-\gamma_2)}\left(\frac{\partial F_1}{\partial r}-\frac{\partial F_2}{\partial r}\right)+\Omega\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{ctg\theta}{r}\psi\right)\right]=\frac{\partial\tilde{\tilde{\varphi}}}{\partial r}$$

Выполнив подстановку сюда выписанных в п. 3 решений уравнений (3.1) и (3.2), которые аналогичны (4.1) и (4.2), получаем систему алгебраических уравнений на определение амплитуд всех гармоник.

Как и ранее, по результатам численного анализа амплитуд гармоник в приближении $|k_1R_a|<<1$ заключаем, что вклад в волновые поля в пористой среде дают лишь гармоники $l=0,\ l=1,\ l=2$.

В результате, выражения для эффективных волновых полей в пористой среде вдали от неоднородности запишутся следующим образом

$$F_1(r,\theta)\approx A_{01}e^{-ik_1r\cos\theta}+\sum_{l=0}^{2}A_{11}^{(l)}(-i)P_l(\cos\theta)\sqrt{\frac{\pi}{2k_1r}}H_{l+1/2}^{(2)}(k_1r)$$
$$F_2(r,\theta)\approx A_{12}^{(0)}(-i)\sqrt{\frac{\pi}{2k_2r}}H_{1/2}^{(2)}(k_2r)+A_{12}^{(2)}(-i)P_2(\cos\theta)\sqrt{\frac{\pi}{2k_2r}}H_{5/2}^{(2)}(k_2r)$$
$$\psi(r,\theta)\approx\sum_{l=1}^{2}A_l^{(l)}\left(-i\right)P_l'(\cos\theta)\sin\theta\sqrt{\frac{\pi}{2k_sr}}H_{l+1/2}^{(2)}(k_sr)$$

Анализируя действительную и мнимую части амплитуд гармоник, заключаем

$|\operatorname{Im} A_{11}^{(0)}| << |\operatorname{Re} A_{11}^{(0)}|, \ |\operatorname{Re} A_{11}^{(1)}| << |\operatorname{Im} A_{11}^{(1)}|, \ |\operatorname{Im} A_{11}^{(2)}| << |\operatorname{Re} A_{11}^{(2)}|,$

$\operatorname{Im} A_{12}^{(0)} \approx -\operatorname{Re} A_{12}^{(0)}, \ \operatorname{Im} A_{12}^{(2)} \approx -\operatorname{Re} A_{12}^{(2)}, \ |\operatorname{Re} A_{t}^{(1)}| << |\operatorname{Im} A_{t}^{(1)}|, \ |\operatorname{Im} A_{t}^{(2)}| << |\operatorname{Re} A_{t}^{(2)}|$

Приближенные равенства здесь выполняются лишь при рассматриваемых невысоких частотах.

В итоге, эффективные волновые поля на больших расстояниях могут быть записаны как

$$
\begin{aligned}
&F_1(r,\theta) \approx A_{01} e^{-ik_1 r\cos\theta} + \left[\operatorname{Re} A_{11}^{(0)} + i\operatorname{Im} A_{11}^{(1)} P_1(\cos\theta) - \operatorname{Re} A_{11}^{(2)} P_2(\cos\theta)\right]\frac{e^{-ik_1 r}}{k_1 r} \\
&F_2(r,\theta) \approx \left[\operatorname{Re} A_{12}^{(0)} - \operatorname{Re} A_{12}^{(2)} P_2(\cos\theta)\right](1-i)\frac{e^{-ik_2 r}}{k_2 r} \approx \left[\operatorname{Re} A_{12}^{(0)} - \operatorname{Re} A_{12}^{(2)} P_2(\cos\theta)\right]\frac{e^{-ik_2 r}}{\operatorname{Re} k_2 r} \qquad (4.4) \\
&\psi(r,\theta) \approx \left[i\operatorname{Im} A_t^{(1)} P_1'(\cos\theta) - \operatorname{Re} A_t^{(2)} P_2'(\cos\theta)\right]\sin\theta\,\frac{e^{-ik_s r}}{k_s r}
\end{aligned}
$$

Определив угловые коэффициенты логарифмических графиков зависимостей амплитуд от частоты, получаем следующие степенные зависимости

$|A_{11}^{(0)}| \approx |\operatorname{Re} A_{11}^{(0)}| \propto \omega^3, \quad |A_{11}^{(1)}| \approx |\operatorname{Im} A_{11}^{(1)}| \propto \omega^3, \quad |A_{11}^{(2)}| \approx |\operatorname{Re} A_{11}^{(2)}| \propto \omega^3,$

$|A_{12}^{(0)}| \propto |\operatorname{Re} A_{12}^{(0)}| \propto \omega^{5/2}, \quad |A_{12}^{(2)}| \propto |\operatorname{Re} A_{12}^{(2)}| \propto \omega^{5/2}, \quad |A_t^{(1)}| \approx |\operatorname{Im} A_t^{(1)}| \propto \omega^3, \quad |A_t^{(2)}| \approx |\operatorname{Re} A_t^{(2)}| \propto \omega^3$

5. Рассеяние на пористом шаровидном включении

Теперь в качестве шаровидной неоднородности рассмотрим пористую среду с параметрами отличными от внешней (окружающей ее) пористой среды.

Уравнения во внешней пористой среде ($r > \mathrm{R}_a$):

$$
\begin{cases}
\Delta F_1 + k_1^2 F_1 = 0 \\
\Delta F_2 + k_2^2 F_2 = 0 \\
\Delta \psi - \dfrac{\psi}{r^2 \sin^2 \theta} + k_s^2 \psi = 0
\end{cases}
\tag{5.1}
$$

Уравнения в пористом включении ($r < \mathrm{R}_a$):

$$
\begin{cases}
\Delta \widehat{F}_1 + \widehat{k}_1^2 \widehat{F}_1 = 0 \\
\Delta \widehat{F}_2 + \widehat{k}_2^2 \widehat{F}_2 = 0 \\
\Delta \widehat{\psi} - \dfrac{\widehat{\psi}}{r^2 \sin^2 \theta} + \widehat{k}_s^2 \widehat{\psi} = 0
\end{cases}
\tag{5.2}
$$

Их решения:

$$
F_1(r,\theta) = A_{01} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) \left(\frac{ir}{k_1} \right)^l \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr} \right)^l \frac{\sin k_1 r}{k_1 r} + \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \left(-\frac{r}{k_1} \right)^l \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr} \right)^l \left[A_{11}^{(l)} \frac{e^{-ik_1 r}}{k_1 r} \right] =
$$

$$
= A_{01} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (-i)^l P_l(\cos\theta) \sqrt{\frac{\pi}{2k_1 r}} J_{l+1/2}(k_1 r) + \sum_{l=0}^{\infty} A_{11}^{(l)} (-i) P_l(\cos\theta) \sqrt{\frac{\pi}{2k_1 r}} H_{l+1/2}^{(2)}(k_1 r)
$$

$$
F_2(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \left(-\frac{r}{k_2} \right)^l \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr} \right)^l \left[A_{12}^{(l)} \frac{e^{-ik_2 r}}{k_2 r} \right] = \sum_{l=0}^{\infty} A_{12}^{(l)} (-i) P_l(\cos\theta) \sqrt{\frac{\pi}{2k_2 r}} H_{l+1/2}^{(2)}(k_2 r)
$$

$$
\psi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l'(\cos\theta) \sin\theta \left(-\frac{r}{k_s} \right)^l \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr} \right)^l \left[A_t^{(l)} \frac{e^{-ik_s r}}{k_s r} \right] = \sum_{l=0}^{\infty} A_t^{(l)} (-i) P_l'(\cos\theta) \sin\theta \sqrt{\frac{\pi}{2k_s r}} H_{l+1/2}^{(2)}(k_s r)
$$

$$
\widehat{F}_1(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \left(-\frac{r}{\widehat{k}_1} \right)^l \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr} \right)^l \left[A_{11}^{(l)} \frac{e^{-\widehat{k}_1 r}}{\widehat{k}_1 r} \right] = \sum_{l=0}^{\infty} B_{11}^{(l)} (-i) P_l(\cos\theta) \sqrt{\frac{\pi}{2\widehat{k}_1 r}} H_{l+1/2}^{(2)}(\widehat{k}_1 r)
$$

$$
\widehat{F}_2(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) \left(-\frac{r}{\widehat{k}_2} \right)^l \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr} \right)^l \left[B_{12}^{(l)} \frac{e^{-i\widehat{k}_2 r}}{\widehat{k}_2 r} \right] = \sum_{l=0}^{\infty} B_{12}^{(l)} (-i) P_l(\cos\theta) \sqrt{\frac{\pi}{2\widehat{k}_2 r}} H_{l+1/2}^{(2)}(\widehat{k}_2 r)
$$

$$
\widehat{\psi}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l'(\cos\theta) \sin\theta \left(-\frac{r}{\widehat{k}_s} \right)^l \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr} \right)^l \left[B_t^{(l)} \frac{e^{-i\widehat{k}_s r}}{\widehat{k}_s r} \right] = \sum_{l=0}^{\infty} B_t^{(l)} (-i) P_l'(\cos\theta) \sin\theta \sqrt{\frac{\pi}{2\widehat{k}_s r}} H_{l+1/2}^{(2)}(\widehat{k}_s r)
$$

Граничные условия ($r = \mathrm{R}_a$):

$$\begin{cases} \Gamma_{rr} = \widehat{\Gamma}_{rr} \\ \Gamma_{r\theta} = \widehat{\Gamma}_{r\theta} \\ p = \widehat{p} \\ u_r = \widehat{u}_r \\ u_\theta = \widehat{u}_\theta \\ \beta(u_r - U_r) = \widehat{\beta}(\widehat{u}_r - \widehat{U}_r) \end{cases} \tag{5.3}$$

Переписав эти граничные условия в терминах потенциалов и сделав упрощения, имеем

1) $$\frac{1}{(\gamma_1-\gamma_2)}\left[\left(A\gamma_2-Q\right)k_1^2F_1-\left(A\gamma_1-Q\right)k_2^2F_2\right]+\frac{2N}{(\gamma_1-\gamma_2)}\left(\gamma_1\frac{\partial^2F_2}{\partial r^2}-\gamma_2\frac{\partial^2F_1}{\partial r^2}\right)+$$
$$+\frac{2N}{r}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+ctg\theta\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{ctg\theta}{r}\psi\right)=\frac{1}{(\widehat{\gamma}_1-\widehat{\gamma}_2)}\left[\left(\widehat{A}\widehat{\gamma}_2-\widehat{Q}\right)\widehat{k}_1^2\widehat{F}_1-\left(\widehat{A}\widehat{\gamma}_1-\widehat{Q}\right)\widehat{k}_2^2\widehat{F}_2\right]+$$
$$+\frac{2\widehat{N}}{(\widehat{\gamma}_1-\widehat{\gamma}_2)}\left(\widehat{\gamma}_1\frac{\partial^2\widehat{F}_2}{\partial r^2}-\widehat{\gamma}_2\frac{\partial^2\widehat{F}_1}{\partial r^2}\right)+\frac{2\widehat{N}}{r}\left(\frac{\partial^2\widehat{\psi}}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial\widehat{\psi}}{\partial\theta}+ctg\theta\frac{\partial\widehat{\psi}}{\partial r}-\frac{ctg\theta}{r}\widehat{\psi}\right)$$

2) $$\frac{2N}{(\gamma_1-\gamma_2)r}\left(\gamma_1\frac{\partial^2F_2}{\partial r\partial\theta}-\gamma_2\frac{\partial^2F_1}{\partial r\partial\theta}-\frac{\gamma_1}{r}\frac{\partial F_2}{\partial\theta}+\frac{\gamma_2}{r}\frac{\partial F_1}{\partial\theta}\right)-N\left(2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+(k_s^2-\frac{2}{r^2})\psi\right)=$$
$$=\frac{2\widehat{N}}{(\widehat{\gamma}_1-\widehat{\gamma}_2)r}\left(\widehat{\gamma}_1\frac{\partial^2\widehat{F}_2}{\partial r\partial\theta}-\widehat{\gamma}_2\frac{\partial^2\widehat{F}_1}{\partial r\partial\theta}-\frac{\widehat{\gamma}_1}{r}\frac{\partial\widehat{F}_2}{\partial\theta}+\frac{\widehat{\gamma}_2}{r}\frac{\partial\widehat{F}_1}{\partial\theta}\right)-\widehat{N}\left(2\frac{\partial^2\widehat{\psi}}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\widehat{\psi}}{\partial r}+(\widehat{k}_s^2-\frac{2}{r^2})\widehat{\psi}\right)$$

3) $$\frac{1}{\beta(\gamma_1-\gamma_2)}\left((Q\gamma_2-R)k_1^2F_1-\left(Q\gamma_1-R\right)k_2^2F_2\right)=\frac{1}{\widehat{\beta}(\widehat{\gamma}_1-\widehat{\gamma}_2)}\left(\left(\widehat{Q}\widehat{\gamma}_2-\widehat{R}\right)\widehat{k}_1^2\widehat{F}_1-\left(\widehat{Q}\widehat{\gamma}_1-\widehat{R}\right)\widehat{k}_2^2\widehat{F}_2\right)$$

4) $$\frac{1}{(\gamma_1-\gamma_2)}\left(\gamma_1\frac{\partial F_2}{\partial r}-\gamma_2\frac{\partial F_1}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{ctg\theta}{r}\psi=\frac{1}{(\widehat{\gamma}_1-\widehat{\gamma}_2)}\left(\widehat{\gamma}_1\frac{\partial\widehat{F}_2}{\partial r}-\widehat{\gamma}_2\frac{\partial\widehat{F}_1}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial\widehat{\psi}}{\partial\theta}+\frac{ctg\theta}{r}\widehat{\psi}$$

5) $$\frac{1}{(\gamma_1-\gamma_2)r}\left(\gamma_1\frac{\partial F_2}{\partial\theta}-\gamma_2\frac{\partial F_1}{\partial\theta}\right)-\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{\psi}{r}=\frac{1}{(\widehat{\gamma}_1-\widehat{\gamma}_2)r}\left(\widehat{\gamma}_1\frac{\partial\widehat{F}_2}{\partial\theta}-\widehat{\gamma}_2\frac{\partial\widehat{F}_1}{\partial\theta}\right)-\frac{\partial\widehat{\psi}}{\partial r}-\frac{\widehat{\psi}}{r}$$

6) $$\frac{\beta}{(\gamma_1-\gamma_2)}\left((1+\gamma_1)\frac{\partial F_2}{\partial r}-(1+\gamma_2)\frac{\partial F_1}{\partial r}\right)+\beta(1-\Omega)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{ctg\theta}{r}\psi\right)=$$
$$=\frac{\widehat{\beta}}{(\widehat{\gamma}_1-\widehat{\gamma}_2)}\left((1+\widehat{\gamma}_1)\frac{\partial\widehat{F}_2}{\partial r}-(1+\widehat{\gamma}_2)\frac{\partial\widehat{F}_1}{\partial r}\right)+\widehat{\beta}(1-\widehat{\Omega})\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\widehat{\psi}}{\partial\theta}+\frac{ctg\theta}{r}\widehat{\psi}\right)$$

После процедуры анализа решения постановки задачи (5.1)-(5.3), заключаем, что данный случай ничем не отличается от ситуации с жидким включением, поэтому эффективное решение во внешней пористой среде вдали от неоднородности имеет тот же вид

$$F_1(r,\theta) \approx A_{01}e^{-ik_1 r\cos\theta} + \sum_{l=0}^{2} A_{11}^{(l)}(-i)P_l(\cos\theta)\sqrt{\frac{\pi}{2k_1 r}}H_{l+1/2}^{(2)}(k_1 r)$$

$$F_2(r,\theta) \approx A_{12}^{(0)}(-i)\sqrt{\frac{\pi}{2k_2 r}}H_{1/2}^{(2)}(k_2 r) + A_{12}^{(2)}(-i)P_2(\cos\theta)\sqrt{\frac{\pi}{2k_2 r}}H_{5/2}^{(2)}(k_2 r)$$

$$\psi(r,\theta) \approx \sum_{l=1}^{2} A_t^{(l)}\left(-i\right)P_l'(\cos\theta)\sin\theta\sqrt{\frac{\pi}{2k_s r}}H_{l+1/2}^{(2)}(k_s r)$$

С учетом соотношений

$$|\operatorname{Im} A_{11}^{(0)}| \ll |\operatorname{Re} A_{11}^{(0)}|,\ \ |\operatorname{Re} A_{11}^{(1)}| \ll |\operatorname{Im} A_{11}^{(1)}|,\ \ |\operatorname{Im} A_{11}^{(2)}| \ll |\operatorname{Re} A_{11}^{(2)}|,$$
$$\operatorname{Im} A_{12}^{(0)} \approx -\operatorname{Re} A_{12}^{(0)},\ \operatorname{Im} A_{12}^{(2)} \approx -\operatorname{Re} A_{12}^{(2)},\ \ |\operatorname{Re} A_t^{(1)}| \ll |\operatorname{Im} A_t^{(1)}|,\ \ |\operatorname{Im} A_t^{(2)}| \ll |\operatorname{Re} A_t^{(2)}|$$

эффективные волновые поля записываются следующим образом

$$\begin{aligned}
F_1(r,\theta) &\approx A_{01}e^{-ik_1 r\cos\theta} + \left[\operatorname{Re} A_{11}^{(0)} + i\operatorname{Im} A_{11}^{(1)}P_1(\cos\theta) - \operatorname{Re} A_{11}^{(2)}P_2(\cos\theta)\right]\frac{e^{-ik_1 r}}{k_1 r} \\
F_2(r,\theta) &\approx \left[\operatorname{Re} A_{12}^{(0)} - \operatorname{Re} A_{12}^{(2)}P_2(\cos\theta)\right](1-i)\frac{e^{-ik_2 r}}{k_2 r} \approx \left[\operatorname{Re} A_{12}^{(0)} - \operatorname{Re} A_{12}^{(2)}P_2(\cos\theta)\right]\frac{e^{-ik_2 r}}{\operatorname{Re} k_2 r} \qquad (5.4) \\
\psi(r,\theta) &\approx \left[i\operatorname{Im} A_t^{(1)}P_1'(\cos\theta) - \operatorname{Re} A_t^{(2)}P_2'(\cos\theta)\right]\sin\theta\frac{e^{-ik_s r}}{k_s r}
\end{aligned}$$

Низкочастотное поведение входящих сюда амплитуд гармоник оказывается таким же, как и в случае жидкого включения

$$|A_{11}^{(0)}| \approx |\operatorname{Re} A_{11}^{(0)}| \propto \omega^3,\quad |A_{11}^{(1)}| \approx |\operatorname{Im} A_{11}^{(1)}| \propto \omega^3,\quad |A_{11}^{(2)}| \approx |\operatorname{Re} A_{11}^{(2)}| \propto \omega^3,$$
$$|A_{12}^{(0)}| \propto |\operatorname{Re} A_{12}^{(0)}| \propto \omega^{5/2},\quad |A_{12}^{(2)}| \propto |\operatorname{Re} A_{12}^{(2)}| \propto \omega^{5/2},\quad |A_t^{(1)}| \approx |\operatorname{Im} A_t^{(1)}| \propto \omega^3,\quad |A_t^{(2)}| \approx |\operatorname{Re} A_t^{(2)}| \propto \omega^3$$

6. Сравнение результатов

Задача рассеяния на пористом флюидонасыщенном включении ранее рассматривалась ([7], [12]), поэтому полученные результаты можно проверить путем сравнения с другими работами в случае пористого включения.

В обеих работах продольные волновые поля были сформулированы для величин $e = div\,\vec{u}$, $\xi = \beta div(\vec{u} - \vec{U})$.

Падающая волна записывается как $e_0 = A_0 e^{ik_+ r\cos\theta}$, а отраженные продольные волновые поля имеют вид

$$e_1 = \sum_{n=0}^{\infty} [B_n^+ h_n^{(1)}(k_+ r) - B_n^- h_n^{(1)}(k_- r)] P_n(\cos\theta)$$

$$\xi_1 = -\frac{H}{C} \sum_{n=0}^{\infty} [B_n^- h_n^{(1)}(k_- r)] P_n(\cos\theta)$$

где $h_n^{(1)}(x) = i\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}} H_{n+1/2}^{(1)}(x)$ - сферическая функция Ханкеля 1-го рода порядка n; H и C - константы, выражаемые через упругие модули среды в Приложении, k_+ и k_- - волновые числа, соответствующие k_1 и k_2 в обозначениях данной работы.

Следует заметить, что здесь не пишется, но подразумевается временная зависимость $e^{-i\omega t}$, в то время как мы изначально брали ее в виде $e^{i\omega t}$. Именно это приводит к тому, что в выражениях для e_0, e_1, ξ_1 фигурируют функции Ханкеля 1-го, а не 2-го рода, как в нашем случае. Как бы то ни было, мы будем сравнивать модули амплитуд гармоник, так что это несущественно.

В работе [7] получены следующие выражения для амплитуд нулевых гармоник

$$B_0^- = \frac{i\xi_-^3 A_0}{3} \frac{\left[(C - M\Gamma_-)(K' + 4/3\mu) - (C' - M'\Gamma_-)(K + 4/3\mu) + (C - M\Gamma_-)(C' - M'\Gamma_-)\left(C'/M' - C/M\right)\right]}{M'(\Gamma_+ - \Gamma_-)(K' + 4/3\mu)}$$

$$B_0^+ = -\frac{i\xi_+^3 A_0}{3} \frac{\left[K' - K + (C - M\Gamma_-)(C' - M'\Gamma_-)\left(C'/M' - C/M\right)\right]}{K' + 4/3\mu} + \frac{\xi_+^3}{\xi_-^3} B_0^-$$

где $\xi_+ = k_+ a$, $\xi_- = k_- a$, $a = R_a$ - радиус неоднородности, $K, \mu, C, M, K', \mu', C', M'$ - упругие константы во внешней пористой среде и внутри включения соответственно (см. п. Приложение).

Параметры Γ_+, Γ_- служат для «расцепления» уравнений пористой среды, т.е. по смыслу являются аналогами введенных нами γ_1, γ_2, однако не совпадают с ними, т.к. изначально мы в качестве независимых переменных наряду с абсолютным смещением скелета рассматривали также абсолютное, а не относительное (как в цитируемых работах), смещение жидкости.

В низкочастотном пределе $\Gamma_+ \approx H / C,\ \Gamma_- \approx 0$. Тогда

$$B_0^- \approx \frac{i\xi_-^3 A_0}{3} \frac{C\left[C(K'+4/3\mu) - C'(K+4/3\mu) + CC'\left(C'/M' - C/M\right)\right]}{HM'(K'+4/3\mu)}$$

$$B_0^+ \approx -\frac{i\xi_+^3 A_0}{3} \frac{\left[K' - K + CC'\left(C'/M' - C/M\right)\right]}{K'+4/3\mu} + \frac{\xi_+^3}{\xi_-^3} B_0^-$$

Выражения для амплитуд второй гармоники в явном виде даны в работе [12]. На низких частотах они записываются следующим образом:

$$B_1^+ = \frac{A_0 \xi_+^3}{3}\left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right)$$

$$B_2^- \approx -\frac{20}{3} \frac{i\xi_-^3 A_0 \sigma C \mu(\mu' - \mu)}{L(16\mu\mu' + 6\lambda\mu' + 14\mu^2 + 9\lambda\mu)}$$

$$B_2^+ \approx \frac{20}{3} \frac{i\xi_+^3 A_0 \mu(\mu' - \mu)}{(16\mu\mu' + 6\lambda\mu' + 14\mu^2 + 9\lambda\mu)}$$

где $\rho = \beta\rho_f + (1-\beta)\rho_s$ - средняя плотность пористого материала, ρ_s - плотность материала упругой матрицы, ρ_f - плотность жидкости, $\sigma,\ \lambda,\ L$ - упругие константы, определяемые в п. Приложение.

Перед проведением сравнения выписанных амплитуд гармоник с теми, что были вычислены в рамках данной работы, необходимо учесть дополнительные множители, связанные с переходом от дивергенции смещений к потенциалам. Опуская временные множители, можем записать

$$e = div\,\vec{u} = \Delta\varphi = \frac{\gamma_1 \Delta F_2 - \gamma_2 \Delta F_1}{\gamma_1 - \gamma_2} = \frac{\gamma_2 k_1^2 F_1 - \gamma_1 k_2^2 F_2}{\gamma_1 - \gamma_2}$$

Отсюда находим связь между амплитудами гармоник, записанных в разных терминах

$$A_{11}^{(l)} = \frac{i(\gamma_1 - \gamma_2)}{\gamma_2 k_1^2} B_l^+ , \quad A_{12}^{(l)} = \frac{i(\gamma_1 - \gamma_2)}{\gamma_1 k_2^2} B_l^-$$

Но в выражения для B_0^-, B_0^+, B_2^-, B_0^+ также входит амплитуда падающей волны A_0, заданная в терминах дивергенции смещений, поэтому аналогичный переход нужно осуществить и здесь

$$A_{01} = A_0 \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)}{\gamma_2 k_1^2}$$

Окончательно можем записать

$$A_{11}^{(l)} = i \frac{B_l^+}{A_0} A_{01} , \quad A_{12}^{(l)} = \frac{i\gamma_2 k_1^2}{\gamma_1 k_2^2} \frac{B_l^-}{A_0} A_{01}$$

Построенные с учетом этого графики (Фиг. 2 – Фиг. 6) отображают хорошее совпадение полученных частотных зависимостей амплитуд гармоник с результатами предыдущих работ [7], [12]. В частности, видно, что имеется практически полное совпадение с результатами [7], – разница в зависимостях $A_{11}^{(0)}$ в пределах рассматриваемого частотного диапазона составляет менее 0,1%, а для $A_{12}^{(0)}$ не превышает 1,5%.

Более того, в работе [12] находит свое подтверждение вывод о виде эффективного волнового поля «медленной волны», т.е. о малости амплитуд первой и всех гармоник, начиная с третьей.

Заключение

В данной работе были получены волновые поля в пористой среде для случаев рассеяния плоской волны на твердом, жидком и пористом шаровидных включениях. Решения записываются в виде рядов - разложений по сферическим гармоникам. Для получения эффективных волновых полей в пористой среде вдали от неоднородности достаточно учитывать лишь первые три члена соответствующих рядов, т.к. амплитуды последующих гармоник оказываются пренебрежимо малыми, если длина волны 1-го рода много больше размера неоднородности (т.е. $|k_1 R_a| << 1$).

Из сравнения выражений для эффективных полей (3.4), (4.4), (5.4) во всех трех рассмотренных случаях выявляются качественные отличия. В случае жидкого и пористого включений вкладом нулевой гармоники в решение $F_2(r,\theta)$ нельзя пренебрегать, как это делалось для случая твердого включения. Таким образом, наличие гармоник $l=0$ и $l=2$ в поле «медленной волны» $F_2(r,\theta)$ характерно для проницаемой границы включения, тогда как для жесткой (непроницаемой) границы достаточно учитывать лишь вклад второй гармоники.

Исходя из выписанных выше низкочастотных асимптотик для каждого случая, можно сделать следующее обобщение: $|A_{11}| \propto \omega^3$, $|A_{12}| \propto \omega^{5/2}$, $|A_t| \propto \omega^3$. Однако, подчеркнем, что это относится только к амплитудам, фигурирующим в соответствующих эффективных волновых полях, а не ко всем гармоникам данного поля (так, например, для случая твердого включения имеем $|A_{12}^{(0)}| \propto \omega^{3/2}$, $|A_{12}^{(1)}| \propto \omega^3$, $|A_{12}^{(2)}| \propto \omega^{5/2}$).

Что касается оценки действительных и мнимых частей амплитуд, то и здесь, обобщая приведенные выше результаты, можно сказать, что независимо от типа включения при изначально выбранной временной зависимости в виде $e^{i\omega t}$ будут иметь место соотношения:

$$|\operatorname{Im} A_{11}^{(0)}| << |\operatorname{Re} A_{11}^{(0)}|, \quad |\operatorname{Im} A_{11}^{(2)}| << |\operatorname{Re} A_{11}^{(2)}|,$$
$$\operatorname{Im} A_{12}^{(2)} \approx -\operatorname{Re} A_{12}^{(2)}, \quad |\operatorname{Im} A_{t}^{(2)}| << |\operatorname{Re} A_{t}^{(2)}|$$

Полученный вид волновых полей в низкочастотном диапазоне был использован авторами для получения эффективных характеристик в средах с многочисленными жидкими включениями [16].

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989. 768 с.

2. Молотков Л.А. Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. СПб.: Наука, 2001. 348 с.

3. Марков М.Г., Маркова И.А., Садовничий С.Н. Распространение низкочастотных поверхностных волн вдоль плоских границ в насыщенных пористых средах, Акуст. Журн., 2010, 56, 3, 333-340.

4. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 339 с.

5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004. 798 с.

6. Эдельман И.Я. Поверхностные волны в пористых средах // Физ. Земли, 2002, 1, 78-95

7. Berryman J.G. Scattering by a spherical inhomogeneity in a fluid saturated porous medium // J. Math. Phys., 1985, 26, 1408-1419.

8. Berryman J.G., Wang H.F. The elastic coefficients of double-porosity models for fluid transport in jointed rock // J. Geophys. Res., 1995, 100, 24611-24627.

9. Biot M.A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media // J. Appl. Phys., 1962, 33, 1482-1498.

10. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range // J. Acous. Soc. Am., 1956, 28, 168-178.

11. Biot M.A., Willis D.G. The elastic coefficients of the theory of consolidation // J. Appl. Mech., 1957, 24, 594-601.

12. Ciz R., Gurevich B. Amplitude of Biot's slow wave scattered by a spherical inclusion in a fluid-saturated poroelastic medium // Geophys. J. Int., 2005, 160, 991-1005.

13. Dutta N.C., Ode H. Attenuation and dispersion of compressional waves in a fluid-filled porous rocks with partial gas saturation (White model) - Part I: Biot theory // Geophysics, 1979, 44, 1777-1788.

14. Gassmann F., Elastic waves through a packing of spheres // Geophysics, 1951, 16, 673-685.

15. Nikolaevskiy V.N., Geomechanics & fluidodynamics (with applications to reservoir engineering). Kluwer, Academic Publishers, 1996.

16. Ponomarev D.V., Nagornov O.V. On effective characteristics of wave propagation in porous fluid-saturated medium containing entirely fluid inclusions // Geophys. J. Int., 2010, 182, 1043-1057.

17. Pride S.R., Berryman J.G. Linear dynamics of double-porosity dual-permeability materials I. Governing equations and acoustic attenuation // Phys. Rev. E, 2003, 68, 036603.

18. Zwikker C., Kosten C.W. Sound absorbing materials. New York: Elsevier Publishing Company, Inc., 1949.

Приложение. Связь используемых параметров сред с измеряемыми физическими величинами.

Коэффициенты A, N, Q, R, фигурирующие в выражениях для связи между деформациями и напряжениями в пористой флюидонасыщенной среде, могут быть выражены через упругие модули среды. Прежде всего, коэффициент N, являющийся модулем сдвига флюидонасыщенной пористой среды совпадает с модулем сдвига упругой матрицы μ [1414]. Остальные коэффициенты выражаются через модули всестороннего сжатия и пористость. Они могут быть определены путем проведения экспериментов по сжатию образца среды при различных условиях, таких как всестороннее сжатие жидкостью и сжатие в непроницаемой оболочке при постоянном внутрипоровом давлении [11]. В результате, эта связь может быть представлена следующим образом [2]

$$A = \frac{\left[K_s(1-\beta) - K_b\right]^2}{K_s(1-\beta+\beta K_s / K_f) - K_b} + K_b - \frac{2}{3}\mu$$

$$N = \mu$$

$$Q = \frac{\beta K_s \left[K_s(1-\beta) - K_b\right]}{K_s(1-\beta+\beta K_s / K_f) - K_b}$$

$$R = \frac{\beta^2 K_s^2}{K_s(1-\beta+\beta K_s / K_f) - K_b}$$

где K_s - модуль всестороннего сжатия упругой матрицы, K_f - модуль всестороннего сжатия жидкости, K_b - модуль всестороннего сжатия пористого вещества при поддержании постоянной величины давления флюида в порах.

Перейдем к определению связи коэффициентов квадратичной формы кинетической энергии единицы объема пористой среды $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{22}$ с плотностями фаз.

Эти коэффициенты представляются в виде

$$\rho_{11} = (1-\beta)\rho_s + \rho_a$$
$$\rho_{12} = -\rho_a$$
$$\rho_{22} = \beta\rho_f + \rho_a$$

где ρ_s - плотность материала упругой матрицы, ρ_f - плотность жидкости, ρ_a - так называемая присоединенная масса [10].

Присоединенная масса может быть записана через другой параметр s - извилистость, определяемый геометрией поровых каналов, $\rho_a = \beta\rho_f(s-1)$, где $1 \le s \le 5$ ([13], [18]).

Во многих статьях (в том числе и тех, с которыми проводится сравнение полученных в данной работе результатов) связь между деформациями и напряжениями записывается с использованием других параметров. Приведем также здесь их выражения через упругие модули среды

$$\sigma = 1 - K_b / K_s$$
$$C = \frac{\sigma}{(\sigma-\beta)/K_s + \beta/K_f}$$
$$M = C/\sigma$$
$$H = K_b + 4/3\mu + \sigma C$$
$$L = K_s + 4/3\mu$$
$$\lambda = H - 2\mu$$